

TD n° 1

MATHS 2 | SPO1U13

PMC 22/23

SOLUTION



par

Jake Special

MATH
MATH ***SPECIAL***

Exercice 1 :

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1: (x, y) \mapsto x$$

$$Df_1 = \mathbb{R}^2$$

f_1 admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$

En fait,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

La limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h, y) - f_1(x, y)}{h}$$

existe donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h, y) - f_1(x, y)}{h} = 1$$

On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y+h) - f_1(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0$$

$$= 0$$

$$\text{On } a \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 0$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto y$$

$$Df_2 = \mathbb{R}^2$$

f_2 admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 1$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto x + y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1$$

$$Df = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto xy$$

$$f_5 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x, y) = y$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y}(x, y) = x$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$f_6 : (x, y) \mapsto x^y$$

$$f_6(x, y) = e^{\ln(x^y)} = e^{y \ln(x)}$$

$$\frac{\partial f_6(x, y)}{\partial x} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f_6(x, y)}{\partial y} = \ln(x) e^{y \ln(x)}$$

$$f_7: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$D_{f_7} = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$f_8: (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$u^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_g(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$-\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} u' u^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial f_g(x, y)}{\partial x} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f_g(x, y)}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exo 2, question 1)

$X \mapsto \arctan(X)$ est définie
sur $\mathbb{R}$

donc, pour $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, on
doit s'assurer que $x \neq 0$.

juste

Ainsi

$$D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

Exo 2

Question 2

$$(x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^2}{x^2 + y^2}$$

et ainsi :

$$x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \left(\frac{-y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$= 1$$



3

$$\vec{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{-y^2}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

$$(a) PV = nRT$$

$$(b) V = \frac{nRT}{P}$$

avec n et R constants, on peut voir V comme une fonction de deux variables

$$V := V(T, P) = \frac{nRT}{P}$$

(c) On a $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

on a montré que

$$V(T, P) = \frac{nRT}{P}$$

Remarque : la notation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

avec le P

en indice

sert à indiquer que

P est ici constant.

avec $V(T, P) = \frac{nRT}{P}$

on a $\frac{\partial V}{\partial T}(T, P) = \frac{nR}{P}$

et ainsi $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{PV}$

on utilise à présent le fait que
dans cette partie on a (par
hypothèse, $a = b = 0$)

$$PV = nRT$$

et l'on écrit

$$\frac{nR}{PV} = \frac{nR}{nRT} = \frac{1}{T}$$

Par conséquent

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$$

2) On suppose que

$$a=0 \quad \text{et} \quad n=1$$

L'equation $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$

derivent abors

$$P(V-b) = nRT$$

$$\Leftrightarrow PV - Pb = nRT$$

$$\Leftrightarrow PV = Pb + nRT$$

$$\Leftrightarrow V = b + \frac{nRT}{P}$$

(b)

$$V := V(T, P) = b + \frac{nRT}{P}$$

$$A = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \leftarrow \text{temperature } \underline{\underline{\text{constante}}}$$

$$= - \frac{nRT}{P^2}$$

$$\text{car } \left(\frac{\gamma}{x} \right)' = - \frac{\gamma}{x^2}$$

avec γ une constante

et ici on remplace juste

α par P et γ par nRT

Donc

$$A = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = - \frac{nRT}{p^2}$$

(c) On a vu en (a) que

$$V(T, P) = b + \frac{nRT}{P}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } B &= \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \leftarrow \text{pression constante} \\ &= \frac{nR}{P} \end{aligned}$$

REMARQUE :

ici, on a juste appliqué

$$(ax)' = a$$

3 - CAS GÉNÉRAL

$$\left(P + \frac{n^2 a}{v^2} \right) (v - nb) = nRT$$

Cette égalité est équivalente à

$$PV - Pnb + \frac{n^2 a}{V^2} V - \frac{n^3 ab}{V^2} = nRT$$

$$\Leftrightarrow PV - Pnb + \frac{n^2 a}{V} - \frac{n^3 ab}{V^2} = nRT$$

$$\Leftrightarrow P(V - nb) = nRT - \frac{n^2 a}{V} - \frac{n^3 ab}{V^2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{(V-nb)} \left[nRT - \frac{n^2 a}{V} - \frac{n^3 ab}{V} \right]$$

i.e.,

$$P(V, T, n) = \frac{1}{(V-nb)} \left[nRT - \frac{n^2 a}{V} - \frac{n^3 ab}{V} \right]$$

b

$$P(V, T, n) = \frac{1}{(V-nb)} \left[nRT - \frac{n^2 a}{V} - \frac{n^3 ab}{V} \right]$$

$$= \frac{1}{V(V-nb)} \left[nRT - n^2 a - n^3 ab \right]$$

$$= f(V) g(V)$$

avec $f(V) = \frac{1}{V(V-nb)}$

$$g(V) = [nRT - n^2a - n^3ab]$$

on applique $(fg)' = f'g + fg'$

et ainsi

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = f'(V)g(V) + f(V)g'(V)$$

on a $f(V) = \frac{1}{V^2 - V_{nb}} = \frac{1}{u}$

avec $u = V^2 - V_{nb}$

$$u' = 2V - nb$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} = \frac{nb - 2V}{(V^2 - Vnb)^2}$$

done

$$f'(V) = \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{nb - 2V}{(V^2 - Vnb)^2}$$

$$g(V) = nRT \checkmark - n^2 a - n^3 ab$$

$$g'(V) = nRT$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = f'(V)g(V) + f(V)g'(V)$$

$$= \frac{(nb - 2V)}{(V^2 - Vnb)^2} \cdot (nRT - n^2a - n^3ab) + \frac{nRT}{V^2 - Vnb}$$

c

$$P(v, T, n) = \frac{1}{(v-nb)} \left[nRT - \frac{n^2 a}{v} - \frac{n^3 ab}{v} \right]$$

$$= \frac{1}{v(v-nb)} \left[nRTv - n^2 a - n^3 ab \right]$$

$$= \frac{1}{v(v-nb)} nRTv - \frac{n^2 a + n^3 ab}{v(v-nb)}$$

On a

$$\frac{\partial P(V, T, n)}{\partial T} = \frac{nRV}{V(V-nb)}$$

$$\text{i.e. } \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V, n} = \frac{nRV}{V(V-nb)}$$

Exercice 4

$$V(x, y) = x^4 + 4x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2$$

1) On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 + 4 \cdot 2xy^2 - 4x \\ &= 4x^3 + 8xy^2 - 4x\end{aligned}$$

$$+ 4.2x^2y - 0 + 4y$$

$$+ 4y$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \vec{0}$$

$$\text{par définition : } \overrightarrow{\text{grad}}(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\text{grad}}(V) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 8xy^2 - 4x = 0 \\ 8x^2y + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 8y^2x - 4x = 0 \\ y(8x^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 8y^2x - 4x = 0 \\ y(8x^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 + 8y^2 - 4) = 0 \\ y(8x^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ou} & 4x^2 + 8y^2 - 4 = 0 \\ y=0 & \text{ou} & 8x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ou} & 8y^2 = 4(1-x^2) \\ y=0 & \text{ou} & 8x^2 = -4 \end{cases}$$

$$8x^2 = -4$$

Impossible !!!



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{1-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les points qui annulent $\overrightarrow{\text{grad}}(v)$

sont

$$\left\{ (0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

3) On a obtenu précédemment :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 8xy^2 - 4x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 8x^2y + 4y$$

Les 4 dérivées partielles secondes à calculer

sont $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

● Calcul de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 8xy^2 - 4x)$$

$$= 12x^2 + 8y^2 - 4$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (8x^2y + 4y)$$

$$= 8x^2 + 4$$

- $\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (8x^2y + 4y)$$

$$= 16xy$$

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 + 8xy^2 - 4x)$$

$$= 16xy$$

b)

On remarque que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x, y)$$

i.e., que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \right)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 8y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = 8x^2 + 4$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = 16xy$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x,y) = 16xy$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0,0) = -4$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{2} - 4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{2} - 4 = 0$$

- $$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 0$$

2 - Dérivées partielles de fonctions composées

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + x^2 y + y^5$$

$Df = \mathbb{R}^2$: f est une fonction polynomiale à deux variables.

2)

$$g: t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto f(x(t), y(t))$$

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

on α

$$f(\alpha(t), y(t)) = \alpha^2 + \alpha y^3 + y^5$$

et

$$\begin{cases} \alpha(t) = 2t \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3xy^2 + 5y^4$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

on α

$$g'(t) = \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} y'(t)$$

$$= (2x(t) + y^3(t)) x'(t) + (3x(t)y^2(t) + 5y^4(t)) y'(t)$$

$$= (4t + \sin^3(t)) \cdot 2 + (3 \cdot 2t \cdot \sin^2(t) + 5\sin^4(t)) \cos(t)$$

$$= 8t + 2\sin^3(t) + 6t\sin^2(t)\cos(t) + 5\sin^4(t)\cos(t)$$

analyse 30 fiches p137

• Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Si les fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

• Dérivées des fonctions composées

– Cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières. Si x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable et :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t)$$

– Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est une fonction des deux variables x et y , elles-mêmes fonctions des deux variables u et v , on peut définir la fonction composée :

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

et écrire, lorsque les diverses dérivées partielles qui interviennent sont définies :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) ;$$

Exercise 6:

1) $D_f = \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy$$

2) $x(r, \theta) = r \cos(\theta)$

$$y(r, \theta) = r \sin(\theta)$$

on utilise les formules
de dérivation des fonctions
de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

en pages 136 et 137.

 ∂x ∂y

– Cas $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est une fonction des deux variables x et y , elles-mêmes fonctions des deux variables u et v , on peut définir la fonction composée :

$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

et écrire, lorsque les diverses dérivées partielles qui interviennent sont définies :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) ;$$

136 Analyse en 30 fiches

26

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) .$$

- **Vecteur gradient**

Le gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0) .

II Dérivées partielles d'ordre supérieur

ici on aura

$$\begin{cases} u := r \\ v := \theta \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} = \cos(\theta) \\ \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r} = \sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial r}$$

$$= (2r \cos(\theta) + r \sin(\theta)) \cos(\theta) + (2r \sin(\theta) + r \cos(\theta)) \sin(\theta)$$

$$= 2r \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\theta) + 2r \sin^2(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$= 2r (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + 2r \sin(\theta) \cos(\theta)$$

on a $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$
ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial r} &= 2r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + 2r\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2r + 2r\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2r(1 + \sin(\theta)\cos(\theta))\end{aligned}$$

Calculons à présent $\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta}$:

On a (formule page 136-137)

$$\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial x} \frac{\partial x(r, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial y} \frac{\partial y(r, \theta)}{\partial \theta}$$

on a $\frac{\partial x(r, \theta)}{\partial \theta} = -r \sin(\theta)$

$$\frac{\partial y(r, \theta)}{\partial \theta} = r \cos(\theta)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} &= (2r \cos(\theta) + r \sin(\theta))(-r \sin(\theta)) + (2r \sin(\theta) + r \cos(\theta))r \cos(\theta) \\ &= -2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) + 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) \\ &= -2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= 0 + r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\end{aligned}$$

$$\text{on a } \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\text{donc } \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} &= r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \\ &= r^2 (\cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta))) \\ &= r^2 (2\cos^2\theta - 1) \\ &= 2r^2\cos^2\theta - r^2 \quad \bullet\end{aligned}$$

Exercice 7 :

On a

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y - 2y^3$$

1) f est une fonction polynomiale à deux variables et est ainsi différentiable sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y^2 - 3x^2$$

et ainsi $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^3 - 6x^2y - 6y^3 - 3yx^2$

$$= 3x^3 - 6y^3 - 9yx^2$$

$$= 3(x^3 - 3x^2y - 2y^3)$$

$$= 3f(x, y).$$

Exercice 8

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f: (x, y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

← dénominateur doit être non nul!

On doit veiller à ce que, $x+y \neq 0$,
i.e., à ce que $x \neq -y$.

On a donc

$$D_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y \}$$

2) Je dois revoir les théorèmes ...

les points tels que $(-2, 2)$, ou plus
généralement $(-n, n)$, $(n, -n)$ sont exclus
de D_f .

2) On va invoquer le théorème qui dit que
si f est de classe C^1 alors elle
est différentiable

- f est différentiable $\Rightarrow$ f continue
- f continue $\nRightarrow$ f différentiable
- f admet des dérivées partielles continues
 $\Rightarrow$ f différentiable

Rappel : Une fonction est dite de classe C^1 sur un ouvert U si ses dérivées partielles premières existent et sont c sur U .

$$f = \frac{u}{v}$$

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x+y - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur D_f .

Par conséquent, f est différentiable sur D_f .

$$3) \quad df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

$$= \frac{2y}{(x+y)^2} dx - \frac{2x}{(x+y)^2} dy$$

$$df(1,1) = \frac{2 \cdot 1}{(1+1)^2} dx - \frac{2 \cdot 1}{(1+1)^2} dy$$

$$= \frac{2 dx}{4} - \frac{2}{4} dy$$

$$= \frac{dx}{2} - \frac{dy}{2}$$

$$df(1,1) = \frac{dx}{2} - \frac{dy}{2}$$

4)

$$f(x_0, y_0) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(y - y_0)$$

Formule en bas de page 137, début de page
138 de "Analyse on 30 fiches"

Exercice 9 :

1) $f : (x, y) \mapsto (x^2 + 4y^3)^5$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

2) On invoque encore le théorème qui stipule que toute fonction de classe C^1 est différentiable.

Rappel : Soit f une fonction définie sur un ouvert U . Si f admet des dérivées partielles premières et que celles-ci sont continues sur U , alors f est dite de classe C^1 .

$$\left(\begin{array}{l|l|l} f = u^5 & u = x^2 + 4y^3 & f' = 5u' u^4 \end{array} \right)$$

Identifier la forme générale de la fonction va nous permettre de calculer

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ rapidement.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5 \cdot 2x(x^2 + 4y^3)^4$$

$$= 10x(x^2 + 4y^3)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5 \cdot 12y^2(x^2 + 4y^3)^4$$

$$= 60y^2(x^2 + 4y^3)^4$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ étant continues en tout point de $\mathbb{R}^2$,
 f est de classe C^1 . Elle est donc
différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

3)

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dy$$

$$= 10x(x^2 + 4y^3)^4 dx + 60y^2(x^2 + 4y^3)^4 dy$$

$$df(1,1) = 10 \cdot 1 (1^2 + 4 \cdot 1^3)^4 dx + 60 \cdot 1^2 (1^2 + 4 \cdot 1^3)^4 dy$$

$$= 10 \cdot 5^4 dx + 60 \cdot 5^4 dy$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 5^4 dx + 12 \cdot 5 \cdot 5^4 dy = 5^5 (2dx + 5dy)$$

4)

$$f(x_0, y_0) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(y - y_0)$$

$$= (x^2 + 4y^3)^5 + 10x(x^2 + 4y^3)^4(x - x_0) \\ + 60y^2(x^2 + 4y^3)^4(y - y_0)$$

Exercice 10

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(4.05, 2.93) = \sqrt{4.05^2 + 2.93^2}$$

$$= \sqrt{(4 + 0.05)^2 + (3 - 0.07)^2}$$

On pose

$$(x_0, y_0) = (4, 3)$$

et

$$(h, k) = (0.05, -0.07)$$

On a

$$\begin{aligned} f(4.05, 2.83) &= f(x_0 + h, y_0 + \mathcal{K}) \\ &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \mathcal{K} \end{aligned}$$

On a $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ainsi :

$$f(4+0,05, 3-0,07) \approx f(4,3) + \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}(0,05) + \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}(-0,07)$$

↙ $\sqrt{25}=5$

$$= 5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{100} - \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{100}$$

$$= 5 + \frac{4}{100} - \frac{21}{500} = 5 + \frac{20}{500} - \frac{21}{500} = 5 - \frac{1}{500}$$

$$5 - \frac{1}{500} = \frac{5.500}{500} - \frac{1}{500}$$

$$= \frac{2500 - 1}{500}$$

$$= \frac{2499}{500}$$

Done

$$f(4.05, 2.93) \approx \frac{2499}{500} \approx 4,998$$